130 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Une matrice c'est avant tout un tableau dans lequel on range des données, on peut ensuite donner plusieurs sens à une matrice.

- On verra d'abord qu'une matrice symétrique réelle peut coder une forme bilinéaire symétrique réelle (ou une forme quadratique réelle). On définira les notions de positivité, définie positivité. On parlera donc de produit scalaire sur un ev réel. Pour généraliser cette notion à un ev complexe, on pourrait être tenté de juste remplacer R par C dans la définition d'une forme bilinéaire, mais ça ne marche pas : on ne peut pas parler de positivité avec une fbs complexe, ça n'a pas de sens. On doit alors définir une forme sesquilinéaire (puis forme hermitienne), codée par une matrice hermitienne. Les propriétés des formes hermitiennes (donc des matrices hermitiennes) sont très poches de celles des formes quadratiques réelles (donc des matrices symétriques réelles) donc certains énoncés ne seront pas répétés.
- On verra ensuite le lien entre les matrices symétriques réelles et les endomph symétriques. On parlera de réduction, de réduction simultannée, et on verra les applications : classification des fq.
- On finira par une étude topologique : décomposition polaire, application à l'étude de groupes topologiques etc.

E un K-ev de dimension n

Déf : Sn, Hn

Prop : Sn et Hn sont des R-ev de dimension n(n+1)/2 et n²

Motivation : Mn(R)=Sn(R)+An(R)

I) Matrices symétriques et formes quadratiques réelles

1) Lien entre matrices symétriques et fq réelles

Déf : forme bilinéaire symétrique

Prop : expression d'une fbs symétrique. On range les Phi(e_i,e_j) dans une matrice, il y a bijection.

Déf : forme quadratique

Prop : bijection entre fbs et fq

Csq : une matrice symétrique code une unique fq et une unique fbs

Prop : b(x,y)=txSy, q(x)=txSX

Déf : fq dp, matrice dp, positive, Sn+(R), Sn++(R)

Prop : deux matrices sont congrues ssi elles codent la même fq dans deux bases différentes *(Soient S et S' tq S'=tPSP. q la fq codée par S : q(X)=tXSX. Dans la base où les coord sont Y=PX, on a q(Y)=tYtPSPY=tYS'Y. Autre sens : e et e' deux bases, P la matrice de passage. S la matrice codant q dans e, S' la matrice codant q dans e'. q(X)=tXSX=t(PY)SPY=tYtPSPY donc la matrice codant q dans e' est tPSP, donc S'=tPSP)*

2) Lien entre matrices hermitiennes et formes hermitiennes

Déf : forme sesquilinéaire

Déf : forme hermitienne

Rq : une forme hermitienne arrive dans R !!

Déf : positive etc, Hn+, Hn++

Rq : pareil que les symétriques réelles, à condition de remplacer R par C, t par * : dans la suite, on va plus parler que de matrices symétriques réelles (ou presque).

3) Classification des formes quadratiques *(valable pour les formes hermitiennes)*

Th : S une matrice symétrique. Alors S est congruente à une matrice diagonale [Szp 67] *(Récurrence. Vient du fait que si on se donne une fbs, il existe une base orthogonale. N'a rien à voir avec le théorème spectral)*

Th : plus précisément, une matrice symétrique est congrue à Ir,s=diag(Ir,Is,0), et si (r',s') différent de (r,s), Ir,s et Ir',s' ne peuvent pas être congrues (ie coder la même fq) [Szp 81] *(c'est la même chose que le th précédent, mais on « norme » les vecteur de la base pour avoir des 1et des -1 sur la diagonale. Pour la seconde partie, RpA, on suppose qu'une même fq q est représentée par Ir,s et Ir',s' dans des bases e et e', on note H+ le sev engendré par les vecteurs de e qui donne q(ei)>0 (resp H-, H'+, H'-). q>0 sur H+ et q<0 sur H'- donc l'intersection de H+ et H'- est {0}, donc r+s'<n, donc r<r'. Par symétrie, r'<r. Donc r=r' et s=s')*

Th : (loi d'inertie de Sylvester) le signe des coeff diagonaux ne change pas dune base og à l'autre [Szp 75] *(corollaire de ce qui précède)*

Déf : signature

Rq : une fq positive si sa signature est du type (s,0), négative si c'est (0,t), définie positive si c'est (n,0), définie négative si c'est (0,n).

Point de vue action de groupe

GLn(R) agit sur Sn(R) par congruence. Par ce qui précède, les orbites sont entièrement paramétrées par les Ir,s, donc deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même signature

4) Signature et applications

Méthode des mineurs de Sylvester

Formes de Hankel [Gant2]

Rq : on verra d'autres applications de la signature quand on parlera de topologie

II) Matrices symétriques et applications linéaires

Ici, E est muni d'une fbs non dégénérée Phi

1) Adjoint d'un endomorphisme *(valable dans le cas hermitien)*

Déf : transposée d'un endomph : u :E->E ; tu : E*->E*, tu(f)=fou [Szp 50]

Prop : si la matrice de u est A dans une base, alors la matrice de u* est tA dans la base duale.

Déf : u un endomph de E. Un endomph v de E vérifiant Phi(u(x),y)=Phi(x,u(x)) pour tous x,y est appelé endomph adjoint de u [Szp 64]

Prop : soit u un endomph de E. Alors u admet un unique adjoint et on le connait [Szp 66] (s'il existe, un adjoint est tj unique, mais en dimension infinie il existe pas forcément)

Cor : un endomph et son adjoint on même rang, même trace, même déterminant. Dans une base orthonormale pour Phi, la matrice de u* est la transconjuguée de celle de u [Szp 66] *(si la base est o.n., la matrice de dPhi est l'identité, reste donc la matrice de tu qui est tA)*

Déf : un endomph est dit symétrique si u*=u, et antisymétrique si u*=-u [Szp 66]

Prop : L(E)=A(E)+S(E) [Szp 66]

Bilan : si on choisit une base o.n pour Phi, il y a une bijection entre l'ensemble des endomorph symétriques et l'ensemble des matrices symétriques.

2) Réduction des matrices symétriques *(valable dans le cas hermitien)*

Ici, on suppose que (E,q) est euclidien

Th (th spectral) : soit u un endomph symétrique de E. Il existe une base orthonormale pour q composée de vecteurs propres de u [Szp 78]

Cor : version matricielle : S une matrice symétrique. Il existe P tq tPP=In et tq S=P^-1DP.

Cor : le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur R [Szp 78]

Cor : S est dans Sn++ ssi toutes ses vp sont strict positives *(comme S=P^-1DP, avec P orthogonale, S est aussi congrue à D. Donc le signe des vp de S dépend de la signature de S en tant que fq)*

3) Réduction simultanée *(valable dans le cas hermitien)*

Th : soit q' une forme quadratique sur (E,q). Alors il existe une base o.n pour q qui est o.g. pour q' [Szp 78] *(q est déf pos donc il existe une base e o.n pour q. On note A la matrice de q dans e. Le th spectral nous dit qu'il existe une base e' de E o.n pour q telle que A=PDP^-1. P est orthogonale donc en fait A est congrue à D donc e' est o.g pour q').*

4) Applications : coniques et quadriques

a) *Classification des coniques* [Aud]

Résumer Audin

b) *Classification des quadriques* [RW L2 p.461 à 470]

Résumer RW

III) Etude topologique

1) Premières propriétés *(valable dans le cas hermitien)*

Prop : Sn(R) est fermé dans Mn(R)

Prop : Sn++(R) est un ouvert dense de Sn(R)

2) Lemme de Morse [Rou]

Prop : si une matrice symétrique S n'est pas trop loin d'une matrice symétrique non dégénérée S0 alors elle lui est congrue et la matrice de congruence dépend de manière C1 de S0

Appl : l'ensemble des fq de signature (p,q) est un ouvert dans Sn

Th : lemme de Morse

3) Exponentielle [MT] *(valable dans le cas hermitien)*

Th : Exp : Hn->Hn++ est un homéo ; Exp : Sn->Sn++ est un homéo [MT 62] [Preuve plus rapide pour l'injectivité : DSerr 80] *(pour Hn : on vérifie que si A est dans Hn, exp(A) est dans Hn++. Surj ? B dans Hn++, B=PDP^-1, on prend D' la matrice* *diag avec les log des éléments de D, et alors exp(PD'P^-1)=A. Inj ? Si exp(A)=exp(B) alors A et B ont même vp. P le poly interpol de Lagrange qui envoie les exp(lambda_i) sur les lambda_i. A=P(exp(A))=P(exp(B)), or expB est un poly en B donc A est un poly en B donc A et B commutent et sont diago, donc diago simult avec mêmes vp donc égales. Continue ? Ok. Réciproque continue ? A_n une suite de matrices de Hn++ qui cv vers A. A_n=exp(B_n), A=exp(B). B_n cv vers B ? A_n converge la norme 2 (le rayon spectral) de A_n est borné : les vp sont contenues dans un compact. Pareil pour A_n^-1. Donc les vp sont comprises sans un segment [a,b] avec a>0. Les vp des B_n aussi car ce sont leurs log. Donc (B_n) est bornée pour la norme 2. Toutes ses va valent B. Donc B_n cv vers B)*

4) <u>Décomposition polaire</u> [MT] *(valable dans le cas hermitien)*

Th : M dans GLn(R). M s'écrit de manière unique M=OS où O est dans O(n) et S dans Sn++ [MT 18] *(existence ? si M=OS alors tM=SO-1 et donc tMM=S². On doit avoir S racine de tMM. Or tMM dp donc on prend sa racine S. On pose O=MS^-1 qui appartient bien à O(n). Unicité ? Revient à montrer l'unicité de la racine de tMM. Si S' est une autre racine dp alors elle a même vp. P le poly qui passe de lambda_i à sqrt(lambda_i). P(tMM)=S=P(S'²) donc S S' commute avec P(S'²)=S, diago simult, égales)*

Th : M dans GLn(C). M=UH unique, U dans U(n), H dans Hn++ [MT 20]

Th : GLn(R) est homéo à O(n)xSn++ [MT 19] *((O,S)->OS appl continue. M_n=O_n.S_n dans GLn qui vs vers M=OS, mq O_n cv vers O et S_n cv vers S. O(n) compact donc soit O' une va de (O_n). La suite extraite S_n_k correspondante cv vers O'^-1M=S' donc M=O'S'. L'unicité de la décomp montre que O=O', S=S'. Il y a une seule v.a. donc ça converge)*

Th : GLn(C) est homéo à U(n)xHn++ [MT 20]

Csq : GLn(C) est homéo à U(n)xHn, GLn(R) est homéo à O(n)xSn [MT 20]

5) <u>Application à l'étude de O(p,q) et U(p,q)</u> [DSerr]

Th : soit G un sous groupe de GLn(C) stable par M->M* et tq pour tout élément de G∩Hn++, sqrt(M) reste dans G. Alors G est homéo à *(G)*∩ *U(*n))x(G∩Hn++) [DSerr 81] *(M dans G, décomp polaire M=UH. M* dans G donc MM*=H² dans G. Donc H est dans G, donc U aussi)*

Th : c'est le cas de O(p,q) et U(p,q).

Csq : O(p,q) est homéo à (O(p,q)∩O(n))x(O(p,q)∩Sn) homéo à O(p)xO(q)xR^pq ;
U(p,q) est homéo à (U(p,q)∩OU(n))x(U(p,q)∩Hn) homéo à U(p)xU(q)xR^pq [DSerr 82]

Th : O(p,q) a 4 composantes connexes ; les détailler [MT 107] + [DSerr 85]

<u>Développements :</u>
1 - Homéo entre S_n et S_n++ par l'exponentielle [MT 62] (***)
2 - Décomposition polaire [MT 18] + [FGN Alg3 177] (**)
3 - Lemme de Morse [Rou 209 + 354] (* ou **)
Sous groupes compacts de GLn(R) [Aless 141] (*)

<u>Bibliographie :</u>
[Szp]
[Aud]
[Rou]
[RW L2]
[Gant2]
[DSerr]
[MT]

<u>Rapport du jury :</u>
2009 : c'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes.